

Title	音波の伝播過程に現れる強非線形現象(波の非線形現象の数理とその応用)
Author(s)	矢野, 猛
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 949: 107-117
Issue Date	1996-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/60299">http://hdl.handle.net/2433/60299</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 音波の伝播過程に現れる強非線形現象

北大 工 矢野 猛 (Takeru Yano)

### 1. はじめに

非線形音波 (有限振幅音波) のふるまいが線形音響学の理論で説明できないことは前世紀から知られていた. たとえば, 非粘性・非熱伝導性の気体中を  $x^*$  軸の正方向に伝播する非線形平面波の進行波解は, 気体が等温的に変化するという仮定のもとで, 1808 年に Poisson<sup>1</sup> が求めている:

$$u^* = f[x^* - (c_0 + u^*)t^*] \quad (1)$$

ここで,  $c_0$  は静止一様状態の音速,  $u^*$  は流速の  $x^*$  方向成分,  $f(x^*)$  は時刻  $t^* = 0$  の流速波形である. (1) は右辺の  $f$  の引数に  $u^*$  を含んでおり, 陰な解と呼ばれる. Stokes<sup>2</sup> は, (1) で記述される波の伝播速度が  $u^*$  の大きい部分ほど大きく  $u^*$  の小さい部分ほど小さいため, 伝播にともなって波形歪みが増大し, ついには波形に無限大の勾配をもつ点が現れることを指摘した. 実際には, 粘性と熱伝導性を無視できる場合気体は断熱変化する. これを考慮した正しい解は Earnshaw<sup>3</sup>によって得られたのだが, (1) との違いは  $f$  の引数の  $u^*$  に正の定数係数がかかるだけである. (1) の  $f$  の引数の中で  $u^* = 0$  としたものが線形解であり, その場合に波形が変形することなく伝播することと対比すると, 上述の伝播にともなう波形歪みこそ音波の非線形性を表す根源的な現象であるといえる. この非線形効果によって波形の勾配が十分急峻になると, 粘性と熱伝導性によるエネルギー散逸を無視できなくなり衝撃波が形成される. 衝撃波は, 非線形効果のために伝播するにつれて成長し, 最大強度に達した後, 減衰しやがて消滅する. このような音波の伝播にともなう (衝撃波の形成と発展を含めた) 非線形現象を研究する学問領域は, 現在, 非線形音響学 (nonlinear acoustics) と呼ばれている.

音波の非線形性の強さを測る尺度となる無次元パラメータは, 音響マッハ数  $M$  である:<sup>4</sup>

$$M \equiv u_0/c_0 \quad (u_0: \text{流速変動の代表値}) \quad (2)$$

これを用いると, 線形音波は  $M \rightarrow 0$  の極限として, 非線形音波は  $M$  がゼロでない有限の値をもつ場合として特徴づけられる. 非線形音響学の理論は,

$$0 < M \ll 1 \quad (3)$$

である, いわゆる弱非線形音波と弱い音響衝撃波を対象とし幅広い領域で成果をあげてきた (平面波・円筒波・球面波の伝播過程を調べる基本問題, 音波の非線形回折, 音波と音波の相互作用, 音響キャビテーション現象に関連する気泡力学, ランダムノイズの非線形伝播の問題等).<sup>4</sup> また近年では, 医療・通信・計測等の分野において, 強力超音波を利用した新技術が実用に供されつつある (体内に超音波や衝撃波を入射することによる腫瘍の同定や結石の破碎, 海洋における遠距離通信への超音波の利用, 超音波による物体の非接触制御等). これにともない, 非線形音響学の重要性はますます増大しているが, その一方で理論的に十分解明されていない点も多々残されている.

弱非線形音波に関する研究が進む一方で、非線形性の強い音波 [ $M = O(1)$ ] の伝播にともなう強非線形現象は、解析的にも実験的にも取り扱いが困難なためもあって、ほとんど何も知られていない状態が続いていた。最近、著者らは、高解像度風上差分法<sup>5</sup>を用いた大規模な数値計算を行い、理想気体中における  $M = O(1)$  の強非線形平面波の衝撃波形成後の現象を初めて詳細に調べた。<sup>6</sup> その結果、旧来の弱非線形理論によって知られていた現象と異なる数々の強非線形特有の現象の存在が明らかになった。この方面の研究は、これ以後、 $N$  波、<sup>7</sup> 球面波、<sup>8</sup> 円形ピストン音源から放射される音波の問題、<sup>9</sup> 導波路を伝播する高次モードの強非線形波の問題<sup>10</sup> などへ進展している。このような強非線形問題は、近い将来のうちに、工学的にも重要な問題になると考えられる。

以下では、音波の強非線形現象に関する著者らによる最近の二つの研究の紹介を行いたい。最初の一つは、平面波の問題<sup>6</sup>で数値的に示された強非線形現象—音響流の発生と密度の低下—の機構を解析的に調べることを目的とした弱非線形問題の高次近似解析である。<sup>11</sup> その結果は、もちろん、強非線形問題には適用できないが、希薄化効果をともなう音響流に対する定性的な理解を深めるには有用である。もう一つは、二次元導波路内の高次モードの強非線形波の伝播過程の数値解析である。<sup>10</sup> ここでも希薄化効果をともなう音響流が現れるが、一次元問題である平面波の場合と異なり、衝撃波の交差点で強く生成される渦のために音響流が循環流となることが示される。紙数の都合上、他の強非線形現象に関する興味深い話題を割愛せざるを得ない。原著論文もしくは著者による解説<sup>12</sup>を参照されたい。

## 2. 鋸歯状の平面波によって励起される音響流とこれによる気体の密度の低下<sup>11</sup>

初期に  $x^* = 0$  に静止していた無限平板が、時刻  $t^* = 0$  から、振幅  $a$ 、角振動数  $\omega$  の正弦振動を開始し、平板の右側の半無限領域を満たす理想気体中に平面音波を放射するとする (図 1 参照)。このとき、音響マッハ数  $M$  が無限小ではなく ( $M \neq 0$ )、音響レイノルズ数  $Re$

$$Re \equiv (\gamma + 1)c_0 a / \delta \quad (\gamma: \text{比熱比}, \delta: \text{音の拡散率}) \quad (4)$$

が 1 に比べて十分に大きければ、音波の波形は伝播するにつれて歪められ、やがて衝撃波が形成され、発展していく。この問題は、音波の非線形現象を理解する上で、最も基本的かつ重要であると考えられる。しかしながら、これまでになされた理論的研究のほとんどが条件 (3) に制限される弱非線形理論の  $O(M)$  まで正しい第一近似解であり、 $M = O(1)$  の強非線形問題に対する解析はもとより、弱非線形問題の高次近似解さえ与えられていなかった。

最近、著者らは、 $M = O(1)$  かつ  $Re \gg 1$  の強非線形問題をとりあげ、解析的方法と数値解法を併用し、衝撃波の形成と発展も含めて、詳細な解析を行った。<sup>6</sup> そこで見いだされた強非線形現象の中でも、衝撃波形成後に発生する波の伝播方向に向かう正味の質量流れ (音響流) はとくに注目に値する。なぜなら、このために音源近傍の気体の密度が時間の経過とともに低下するからである (したがって定常状態は実現されないであろう)。これに対して、旧来の弱非線形理論 (第一近似解) によると、音源から十分遠方で、波形は希薄部と圧縮部が対称な鋸歯状波に漸近し、それゆえ音響流は存在せず、定常状態が実現されることになる。

この節では、弱非線形 ( $M \ll 1$  かつ  $Re \gg 1$ ) の場合にも、このような音響流は弱いながらも確かに存在することを、旧来の弱非線形理論の近似を高めることによって解析的に示し、気体の密度の低下と衝撃波面で生じるエントロピーと反射波との間に密接な関係があることを示す。<sup>11</sup> まず、2.1 節から 2.4 節までで、衝撃波を含む波の発展を  $O(M^2)$  までの精度で決定する第二近似解を構成し、遠方における波形が圧縮部と希薄部が非対称な鋸歯状波型に発展し、波の伝播方向に向かう時間的にも空間的にもほぼ一定の音響流を励起することを示す。2.5 節では、音響流によって気体が遠方に運び去られるために衝撃波形成点以遠の限られた領域において気体の密度が徐々に低下していく現象を、衝撃波面で生成されるエントロピーと反射波という  $O(M^3)$  の効果を考慮することによって説明する。

## 2.1 単一波の厳密解

以下の無次元変数を導入する:

$$t = \omega t^*, \quad x = \omega x^*/c_0, \quad u = u^*/c_0, \quad \rho = \rho^*/\rho_0, \quad p = p^*/\rho_0 c_0^2 \quad (5)$$

ただし、 $u^*$  は流速の  $x^*$  方向成分、 $\rho^*$  は密度、 $p^*$  は圧力、添え字 0 は初期の静止一様状態における量を表わす。条件  $Re \gg 1$  によって、薄い衝撃波層を除いて気体の粘性と熱伝導性による散逸を無視することができる。この場合に、平板の振動によって初期に静止一様状態にあった理想気体中に放射される波は、衝撃波形成時刻までは単一波 (simple wave) とみなせる。平板の振動を  $x = MX(t)$  と表すと、単一波の厳密解は、パラメータ  $\mu$  を含む形で、

$$u = MX'(\mu), \quad y - \mu + MX(\mu) + \beta M(t - \mu)X'(\mu) = 0 \quad \left( \beta \equiv \frac{\gamma + 1}{2} \right) \quad (6)$$

と表される。<sup>6</sup> ただし、 $y = t - x$  は波の位相であり、また、' は引数による微分を意味する。流速  $u$  が得られれば圧力  $p$  と密度  $\rho$  を求めることは容易である。衝撃波形成後は、単一波の解を用いることはできず、一般的な解析を行うためには、基礎方程式系 (Euler 方程式) を数値的に解かなければならない。しかし、弱非線形の場合、 $O(M^3)$  の効果を無視するならば、波形を、(6) にしたがうなめらかな部分と、Rankine-Hugoniot 関係式を満足する不連続面の組み合わせとして求めることができる。以下では、 $X(t)$  はなめらかな周期  $2\pi$  の周期関数で  $X(0) = X'(0) = 0$  を満たすとする。

## 2.2 衝撃波形成までの第二近似解

$O(M^2)$  まで正しい (6) の第二近似解は

$$v(\xi) = X'(\xi) + MX(\xi)X''(\xi), \quad \xi = y + \sigma X'(\xi) + M\sigma X(\xi)X''(\xi) - \beta M\sigma[X'(\xi)]^2 \quad (7)$$

という形に表すことができる。ここで、 $\xi$  はパラメータであり、 $v \equiv u/M$ 、 $\sigma \equiv \beta Mx$  である。(7) の二つの式において、 $M$  を係数にもつ項を無視すると、これまでによく知られていた第一近似解になる。(7) から得られる波形の例として、 $X(t) = \cos t - 1$  ( $M = 0.2$ ) の場合の流

速波形を図 2(a) に示した. 第二近似解は, 旧来の弱非線形解 (第一近似解) とは大きく異なり, 単一波の厳密解とほぼ一致している.

### 2.3 衝撃波の発展

距離  $\sigma$  における衝撃波面の位相を  $y = y_s(\sigma)$  とし,  $V_s = dy_s(\sigma)/d\sigma$  とおく [ $V_s$  は  $(y, \sigma)$  面上における衝撃波の“伝播速度”とみなされる]. Rankine-Hugoniot 関係式に, 衝撃波面におけるとびが小さい ( $M \ll 1$ ) という条件を用いると,

$$V_s = -\frac{1}{2}[v(\xi_1) + v(\xi_2)] + \frac{1}{8}\beta M([v(\xi_1)]^2 + 6v(\xi_1)v(\xi_2) + [v(\xi_2)]^2) + O(M^2) \quad (8)$$

を導くことができる.<sup>13</sup> 衝撃波面の位相  $y_s$  と, その直前と直後の流速を与える  $\xi_1$  と  $\xi_2$  は,

$$\xi_\alpha = y_s + \sigma X'(\xi_\alpha) + M\sigma X(\xi_\alpha)X''(\xi_\alpha) - \beta M\sigma[X'(\xi_\alpha)]^2 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (9)$$

によって関係づけられる [(7) の第二式参照]. (9) を用いれば, (8) から  $\xi_1$  と  $\xi_2$  を消去することができ,  $y_s$  に対する常微分方程式が得られる. 衝撃波の形成時刻と形成位置を初期条件としてその微分方程式を解くことによって, 衝撃波面の位相  $y_s$  を  $\sigma$  の関数として決定できる. 図 2(b) は, そのようにして決定された衝撃波面を用いて, (7) から得られる波形の多価となった部分を切り落としたものである. 非対称な鋸歯状波型の波に発展することがわかる.

### 2.4 音響流

無次元化された質量流束密度  $\rho u$  の時間平均 ( $\overline{\rho u} \equiv (1/2\pi) \int_{t-2\pi}^t \rho u dt$ )

$$\overline{\rho u} = -\frac{M}{2\pi} \left[ X(\xi) - \frac{\sigma}{2} [X'(\xi)]^2 \right]_{\xi_1}^{\xi_2} - \frac{M^2}{2\pi} \left[ X(\xi)X'(\xi) + \frac{\gamma\sigma}{3} [X'(\xi)]^3 - \sigma X(\xi)X'(\xi)X''(\xi) \right]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (10)$$

がゼロでなければ音響流が生じていることになる. よって, (10) の右辺に, (8)(9) を解くことによって得られる  $\xi_1$  と  $\xi_2$  を代入すれば, 音響流の分布がわかる. 衝撃波が存在しなければ,  $\xi_1 = \xi_2$  とみなされるので,  $\overline{\rho u} = 0$  である (これは厳密に証明されている<sup>6</sup>). 音響流の分布を図 3 に示す. この図から音響流の空間的一様性が確かめられる. 音響流の (準) 定常性は, 第二近似解 (7) および (8)(9) を解いて得られる  $\xi_1$  と  $\xi_2$  が  $\sigma$  のみの関数であることからしたがう.

### 2.5 気体の密度の低下

図 3 に示されるような空間分布をもつ音響流が存在すると, 音源近傍の気体の密度は必然的に低下する. ところが,  $\sigma$  を固定すると, (7)–(9) は (時間的に) 周期的な定常状態の解を与えるため, 密度の低下を記述し得ない. 密度の低下は, 以下に示すように, 三次の効果である, 衝撃波面におけるエントロピーの生成と反射波の発生を考慮することによって説明できる.<sup>11</sup> この変動分を含めた解を, 前節までで求められた第二近似解の部分  $[(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{u})$  と表す] と, 三次の変動量部分  $[(\hat{\rho}, \hat{p}, \hat{u})$  と表す] との和として求める (すなわち,  $\rho = \tilde{\rho} + \hat{\rho}$ ,  $p = \tilde{p} + \hat{p}$ ,

$u = \tilde{u} + \hat{u}$ . 三次の変動量は、たとえば密度に対しては、次式のように得られる:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x, t) = & -A \left[ \sum_{i=1}^n [\tilde{u}_2^{(i)}(Z^{(i)}) - \tilde{u}_1^{(i)}(Z^{(i)})]^3 + \sum_{i=1}^m [\tilde{u}_2^{(i)}(W^{(i)}) - \tilde{u}_1^{(i)}(W^{(i)})]^3 \right] \\ & - B \sum_{i=1}^n [\tilde{u}_2^{(i)}(x) - \tilde{u}_1^{(i)}(x)]^3 \end{aligned} \quad (11)$$

(流速と圧力に対しても同様に求めることができる.<sup>11)</sup> ここで、 $A = (5 - 3\gamma)(\gamma + 1)/192$  と  $B = (\gamma^2 - 1)/12$  は定数、添え字  $(i)$  は波の先頭から数えて  $i$  番目の衝撃波の直前あるいは直後の量であることを示し、 $Z^{(i)}$  は点  $(x, t)$  をとおる左向きの線形の特性格線  $t + x = \text{const.}$  が  $i$  番目の衝撃波の軌跡  $t = t_S^{(i)}(x)$  と交差する  $x$  座標を意味し、 $n$  はこの特性格線が点  $(x, t)$  に到達するまでに横切る衝撃波の軌跡の数を表す。また、 $W^{(i)}$  は、点  $(x, t)$  をとおる右向きの線形の特性格線  $t - x = \text{const.}$  と  $x = 0$  で交差する左向きの特性格線の式  $t + x = t_S^{(i)}(W^{(i)}) + W^{(i)}$  から決まり、 $m$  は  $t = t_S^{(i)}(W^{(i)}) + W^{(i)}$  を満たす  $i$  の最大値である。右辺第一項は衝撃波面で発生し音源に向かって伝播していく反射波からの寄与を表し、第二項は、衝撃波面で生成されるエントロピーからの寄与を表す。

密度に対する三次の補正 (11) を考慮して、平均密度を計算したものが図 4 である。 $\gamma = 1.4$  のとき、 $B = 8/100$  であるのに対し、 $A = 1/100$  であり、密度の低下に主要な寄与をなすのはエントロピーの蓄積であることがわかる。なお、この解析の妥当性に対する基礎的な検証の一つとして、時刻  $t = 2N\pi$  ( $N$  は整数) において  $\tilde{\rho} + \hat{\rho}$  を  $x$  に関して 0 から  $2N\pi$  まで (数値) 積分し、質量保存則が良い精度で満たされていることが確認されている。<sup>11</sup>

## 2.6 まとめ

多数の衝撃波面で生じる三次の反射波とエントロピーが重ね合わされた結果として、気体の密度は時間とともに低下する。反射波とエントロピーの、したがって密度の、この“蓄積的”な性質ゆえに、十分に時間が経つと、三次の変動量は二次の量と同程度にまで増大する。そのような長い時間にわたる現象に対しては、この節の解法は有効ではない。しかしながら、強非線形波の数値解析によって、十分に長い時間が経過した後も音響流は準定常性を維持し続け、音源近傍の気体の質量はほぼ一定の割合で減少し続けることが確認されている。<sup>11</sup> このことから、長い時間が経ってこの節で用いられた解析方法が有効でなくなった後も、ここで明らかにされた音響流の発生と希薄化の機構は、少なくとも定性的には、現象を正しく記述し得るものと思われる。

## 3. 二次元導波路を伝播する非平面波モードの強非線形波<sup>10</sup>

無限に長い平行な平面壁の間の気体中を伝播する線形音波は、壁の間隔  $L$  と音源の角振動数  $\omega$  に依存する (壁に沿う方向の) 位相速度をもつ分散性の波である。しかし、 $0 < M \ll 1$  で、 $\Omega \equiv L\omega/c_0$  が  $\pi$  に比べて大きく、散逸が無視できる場合には、波形は非線形効果によって伝播とともに徐々に歪められるが、分散性はあまり効かず、遠方で衝撃波が形成されることが解

析的に示されている ( $\Omega = \pi$  は第一モードの線形波の遮断周波数に対応する).<sup>14-16</sup> この節では, 第一モードで正弦振動する音源から放射される  $M = O(1)$ ,  $Re \gg 1$  かつ  $\pi < \Omega = O(1)$  の強非線形波の伝播過程を, 高解像度風上差分法<sup>5</sup>を用いて数値的に解析する.

### 3.1 問題とその定式化

無限に長い平行な平面壁の間が静止一様状態の理想気体で満たされている (二次元導波路). 壁に沿って  $x^*$  軸をとり,  $x^* = 0$  にある音源が, 時刻  $t^* = 0$  から, 第一モードで最大振幅  $a$ , 角振動数  $\omega$  の正弦振動を開始し,  $x^*$  軸の正方向に音波を放射する (図 5 参照).

無次元変数を用いると, 支配方程式と境界条件および初期条件は以下のように表される. 支配方程式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(E_t + p)v]}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

境界条件:

$$h \equiv x - M(\cos t - 1) \cos \frac{\pi y}{\Omega} = 0 \text{ において } \frac{Dh}{Dt} = 0 \quad (16)$$

$$y = 0, \Omega \text{ において } v = 0 \quad (17)$$

初期条件 ( $t = 0$ ):

$$u = v = 0, \quad p = 1/\gamma, \quad \rho = 1 \quad (18)$$

ただし,  $x = \omega x^*/c_0$  と  $y = \omega y^*/c_0$  は無次元座標,  $t = \omega t^*$  は無次元時間,  $u = u^*/c_0$  と  $v = v^*/c_0$  は無次元流速の  $x$  方向成分と  $y$  方向成分,  $\rho = \rho^*/\rho_0$  は気体の無次元密度,  $p = p^*/\gamma p_0$  は無次元圧力,  $E_t = (1/2)\rho(u^2 + v^2) + p/(\gamma - 1)$  は無次元化された気体の単位体積当たりの全エネルギーである. 上記の初期境界値問題を高解像度風上差分法を用いて数値的に解く.

音響マッハ数  $M \rightarrow 0$  の極限が線形問題である.  $Re \gg 1$  であれば, 圧力変動に対する解は

$$\begin{aligned} \frac{p - (1/\gamma)}{M} = & -\frac{1}{2\kappa} \left[ \sin \left( t - \kappa x - \frac{\pi y}{\Omega} \right) + \sin \left( t - \kappa x + \frac{\pi y}{\Omega} \right) \right] \\ & + \cos \frac{\pi y}{\Omega} \int_t^\infty \cos(t - \tau) J_0 \left( \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

と与えられる. ただし,  $\kappa = \sqrt{1 - (\pi/\Omega)^2}$  とする. 右辺の積分を含む項は  $t \rightarrow \infty$  においてゼロになり, 第一モードの定常状態が実現される. この波動場は  $x$  軸に対して角度  $\pm \arctan(\pi/\kappa\Omega)$  をなす斜め方向に伝播する二つの線形平面波の重ね合わせで表される. 弱非線形問題では, 近傍場のふるまいは第一近似では線形音波のそれとみなしてよい. 弱い非線形効果は遠方場で徐々に蓄積し, ついには衝撃波が形成されることが知られている.<sup>14-16</sup>

### 3.2 強非線形問題の数値解析結果

図 6 に,  $M = 0.2$ ,  $\Omega = 4\pi$  の場合の  $t = 30\pi$  における流速の  $x$  成分の等値線図を示す. 音源から数波長の領域において非線形効果による波形歪みが顕著になり, 一方の壁面から他方の壁面に向かって湾曲した衝撃波面が形成される. 音源から十波長程度離れた領域では, 衝撃波は壁面上で交差 (反射) する. 図を見ると, 衝撃波の交差点をとる弱い接触不連続面 (渦層) が発生していることがわかる. 弱非線形波と同様に分散性はあまり効かない.

音波は音源から連続的に放射されるので, 次々と発生する衝撃波は音源近傍で交差を繰り返す, そこで渦が (相対的に) 強く生成される. 図 7(a)(b) は, 時間平均された渦度の大きさ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \quad (20)$$

の時間変化を等高線で示したものである. 時間とともに渦度が増大していく様子が示されている ( $t = 0$  には渦なしであった). 平均の渦度は音源の近傍の最初の衝撃波の交差点に最も強く集中し, そこから接触不連続面に沿ってのびる細長い領域に局在している.

図 8(a)(b) に, 音響流, すなわち, 時間平均された質量流束ベクトル

$$(\overline{\rho u}, \overline{\rho v}) \quad \text{ただし} \quad \overline{\rho u} = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t \rho u dt, \quad \overline{\rho v} = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t \rho v dt, \quad (21)$$

の分布を示す. 時間が経過するにつれて音響流の流れ模様は変化していき, やがて音源近傍に二つの渦状の循環流を生じる. 循環流が生じた後は, 流れ模様はあまり変化せず, 渦の中心部の流速が時間とともに大きくなっていく.

図 9 に, 時間平均された密度の等高線を示す. この図から, 音源近傍の渦度が強く局在している領域の気体の密度が低下していることがわかる. その領域は, 渦状の音響流の中心部とほぼ一致しており, 音響流によって気体が遠方へと運び去られた結果として, 密度が低下したといえる. このように, 衝撃波によって生成される渦が強く局在する領域に循環的な音響流が形成され, それによって気体の密度が低下していく現象は, 先に著者らによって調べられた円形ピストンの強非線形問題<sup>9</sup>で見いだされた現象と類似している.

### 3.3 まとめ

二次元導波路を伝播する第一モードの強非線形波の主な特徴を以下に要約する:

- (1) 強い非線形効果によって, 衝撃波は近傍場で形成される (弱非線形波では衝撃波が形成されるのは遠方場である). 弱非線形問題同様, 分散性は現象にほとんど寄与しない.
- (2) 衝撃波面は湾曲している (弱非線形波ではほぼ平面状).
- (3)  $M$  が小さいときには ( $M \lesssim 0.1$ ), 衝撃波面の交差点は壁面上である.  $M$  が大きくなると ( $M \gtrsim 0.2$ ), 音源近傍の衝撃波面は気体中で交差する. その場合も, 音源から離れると ( $x \gtrsim 30\pi$ ), 衝撃波は減衰し, その波面は平面状になり, 衝撃波の交差点も壁面に近づく.
- (4) 衝撃波面が気体中で交差するとき, 交差点をとる弱い接触不連続面 (渦層) が生じる.



- (5) 渦は衝撃波の交差点で最も強く生成される。生成された渦は、おおむね、その位置にとどまり、時間とともに“蓄積”される。
- (6) 平均の質量流(音響流)は、渦が蓄積するのにもとない、渦が強く局在する点を中心とする循環流へと成長する(弱非線形問題で発生する音響流は循環しない)。
- (7) 音響流は気体を遠方へと運び、渦領域で気体の密度が低下する(弱非線形の第一近似では密度は低下しない)。

#### 4. おわりに

強非線形音波と衝撃波の伝播過程に関しては、解明すべき問題点が多数残されている。そこに現れる強非線形現象は、2節と3節でみたように、音場というそもそも非定常な波動場に形成される多数の衝撃波の成長と減衰のみならず、それにともなうエントロピー、反射波、渦等の生成の問題をも含んでいる。この意味では、気体力学の中心的課題の一つである定常な超音速流れの中の高々数個の衝撃波の形状決定の問題と対極をなすものと考えてよいだろう。しかしながら、前者を解明することを目的とする研究は内外を問わず極めて少ない。これらの現象に対する理解を深めるために、さらに一層の(実験を含めた)研究の積み重ねが必要であることはいうまでもない。

ここで紹介した二つの研究は、北海道大学井上良紀教授との共同研究によるものである。井上教授には、日頃から多くの有益な助言をいただいている。ここに付記して謝意を表する。

#### 参考文献

- <sup>1</sup> S. D. Poisson: *J. Ecole Polytech. Paris* **7** (1808) 319-370.
- <sup>2</sup> G. G. Stokes: *Philos. Mag., ser 3* **33** (1848) 349-356.
- <sup>3</sup> S. Earnshaw: *Trans. R. Soc. London* **150** (1860) 133-148.
- <sup>4</sup> O. V. Rudenko & S. I. Soluyan: *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Consultants Bureau, 1977).
- <sup>5</sup> S. R. Chakravarthy: NASA CR 4043 (1987).
- <sup>6</sup> Y. Inoue & T. Yano: *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (1993) 1632-1642.
- <sup>7</sup> Y. Inoue & T. Yano: *J. Fluid Mech.* (submitted).
- <sup>8</sup> T. Yano & Y. Inoue: *Phys. Fluids* **6** (1994) 2831-2844.
- <sup>9</sup> T. Yano & Y. Inoue: in *Advances in Nonlinear Acoustics* (ed. H. Hobæk, World Scientific, 1993) 583-588.
- <sup>10</sup> 矢野 猛, 井上良紀: 第6回計算流体力学シンポジウム講演要旨集 (1995) 11.
- <sup>11</sup> T. Yano & Y. Inoue: *Phys. Fluids* (submitted).
- <sup>12</sup> 矢野 猛: *ながれ* **14** (1995) 364-376.
- <sup>13</sup> R. Courant & K. O. Friedrichs: *Supersonic Flow and Shock Waves* (Springer, 1948).
- <sup>14</sup> V. V. Kaner & O. V. Rudenko: *Vest. Moskov. Univ. Fiz.* **33** (1978) 78-785.
- <sup>15</sup> J. H. Ginsberg & H. C. Miao: *J. Acoust. Soc. Am.* **80** (1986) 911-920.
- <sup>16</sup> M. F. Hamilton & J. A. TenCate: *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988) 327-334.

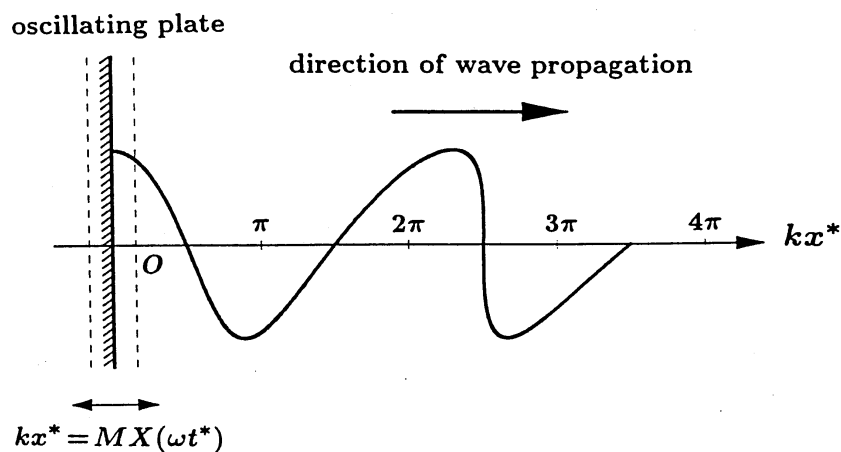


図 1. 平板の振動によって放射される非線形平面音波 (概念図).

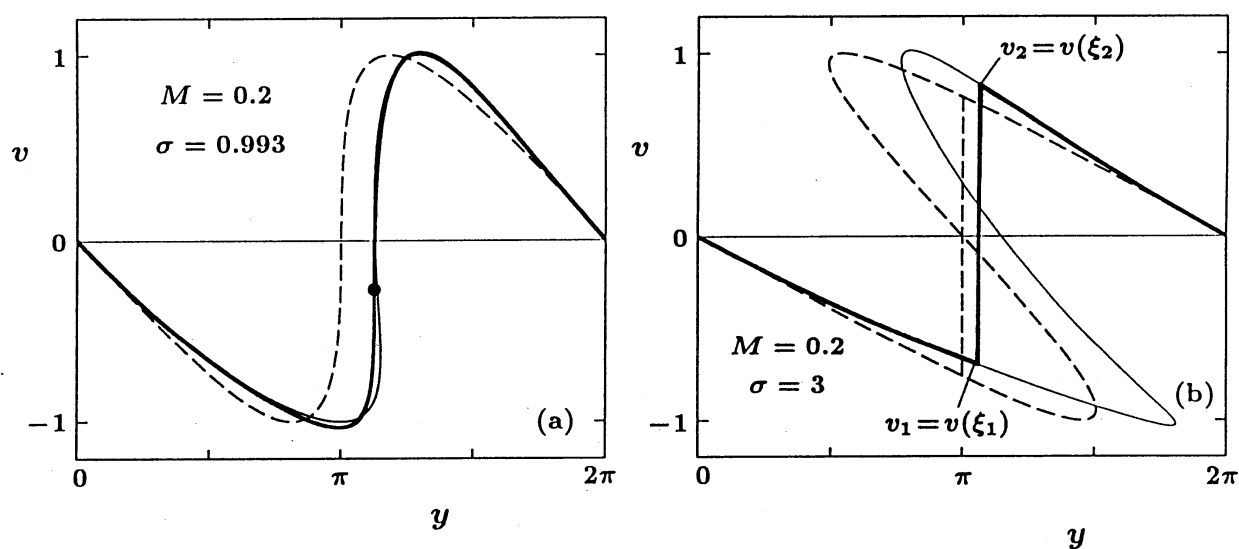


図 2. 流速波形. (a): 衝撃波形成位置. 太い実線が第二近似解を, 細い実線が単一波の厳密解を, 破線が第一近似解を示す. (b): 衝撃波を含む波形. 破線は第一近似解.

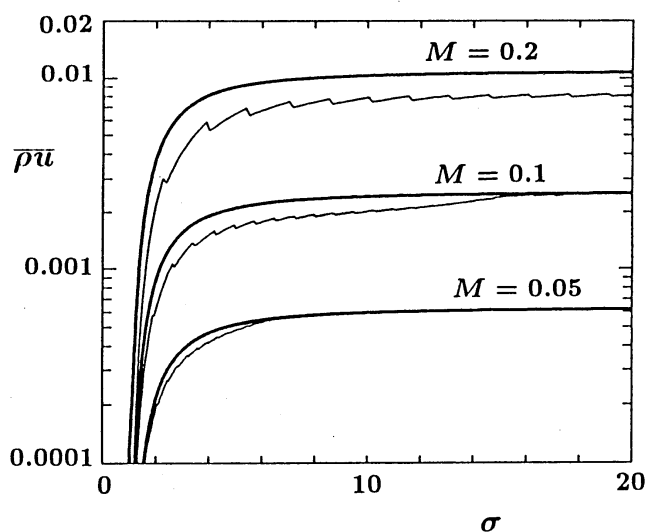


図 3. 音響流の空間分布. 太い実線が第二近似解 (10) を表し, 細い実線が高解像度風上差分法による数値解析の結果を表す.

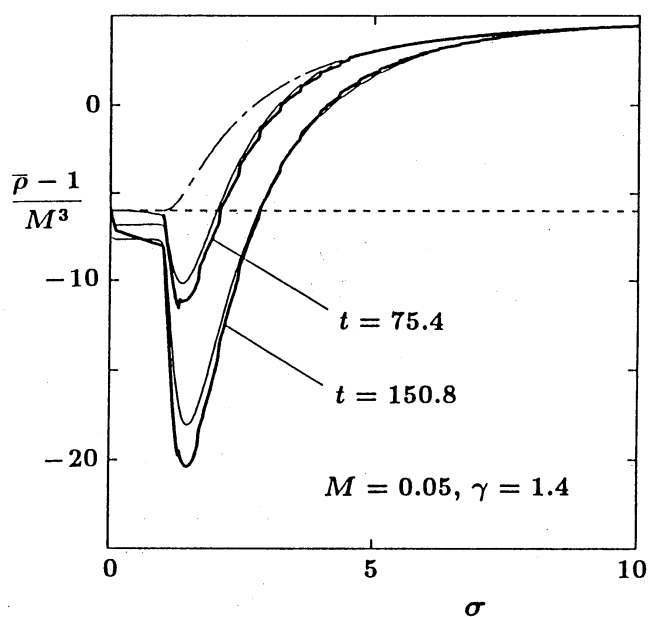


図 4. 平均密度の時間発展. 太い実線が第二近似解  $\bar{\rho}$  に三次の補正  $\hat{\rho}$  を加えた結果, 細い実線が高解像度風上差分法による数値解析の結果.

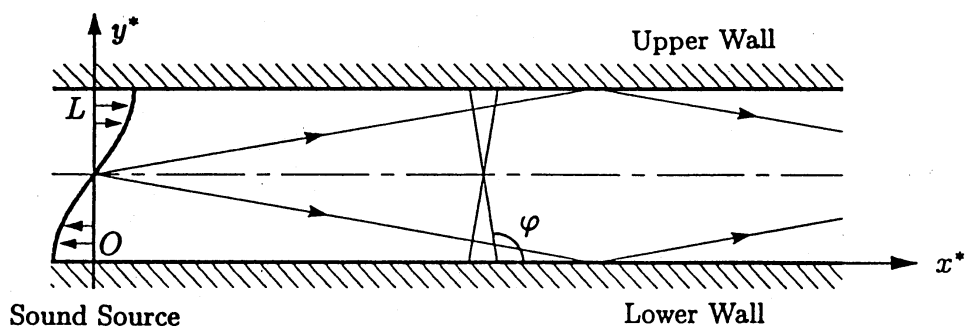


図 5. 二次元導波路を伝播する第一モードの音波 (概念図). 矢印は線形波の波数ベクトルの方向 [(19) 参照].  $\varphi = \pi - \arctan(\Omega\kappa/\pi)$  は線形波の波面と  $x$  軸のなす角度.

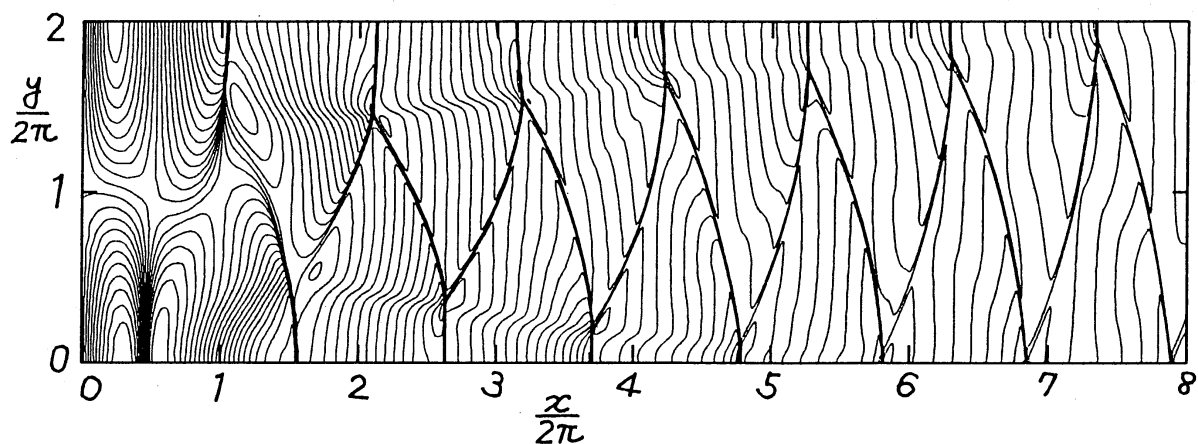


図 6. 強非線形波の流速の  $x$  方向成分  $u$  の等値線図. ( $M = 0.2, \Omega = 4\pi, \gamma = 1.4, t = 30\pi$ ).

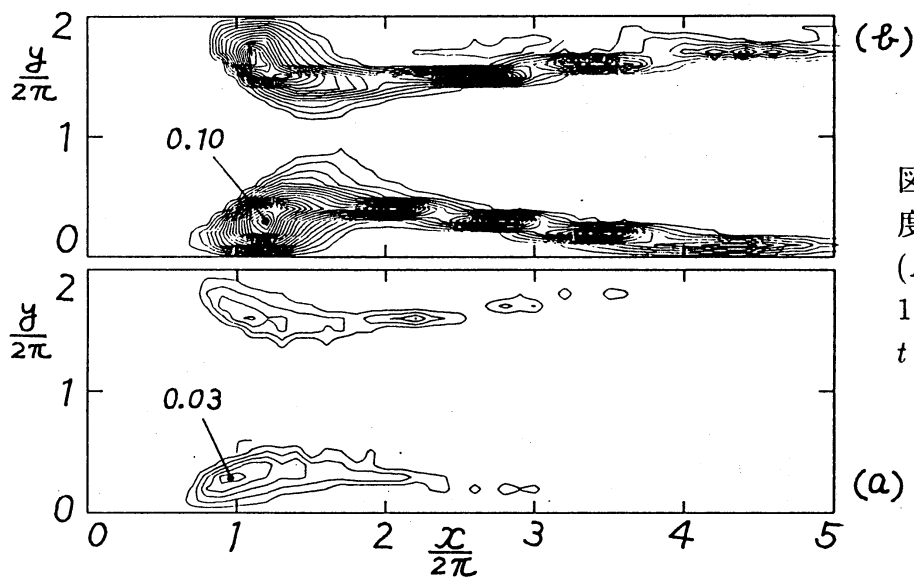


図 7. 時間平均された渦度の等値線図 [(20) 参照]. ( $M = 0.2$ ,  $\Omega = 4\pi$ ,  $\gamma = 1.4$ ). (a):  $t = 10\pi$ . (b):  $t = 30\pi$ .

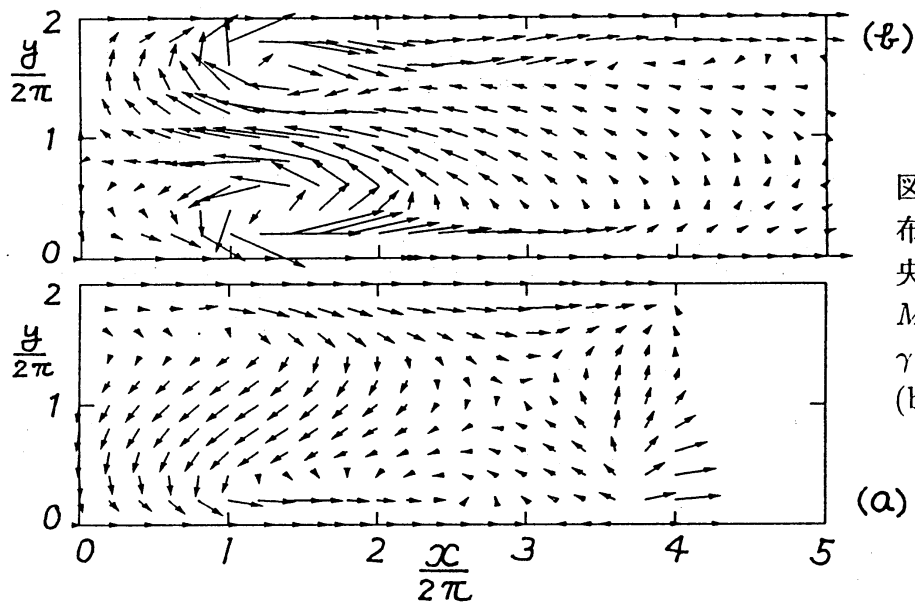


図 8. 音響流 ( $\overline{\rho u}$ ,  $\overline{\rho v}$ ) の分布 [(21) 参照]. 図の上の中央に示された矢印の長さが  $M^2$ . ( $M = 0.2$ ,  $\Omega = 4\pi$ ,  $\gamma = 1.4$ ). (a):  $t = 10\pi$ . (b):  $t = 30\pi$ .

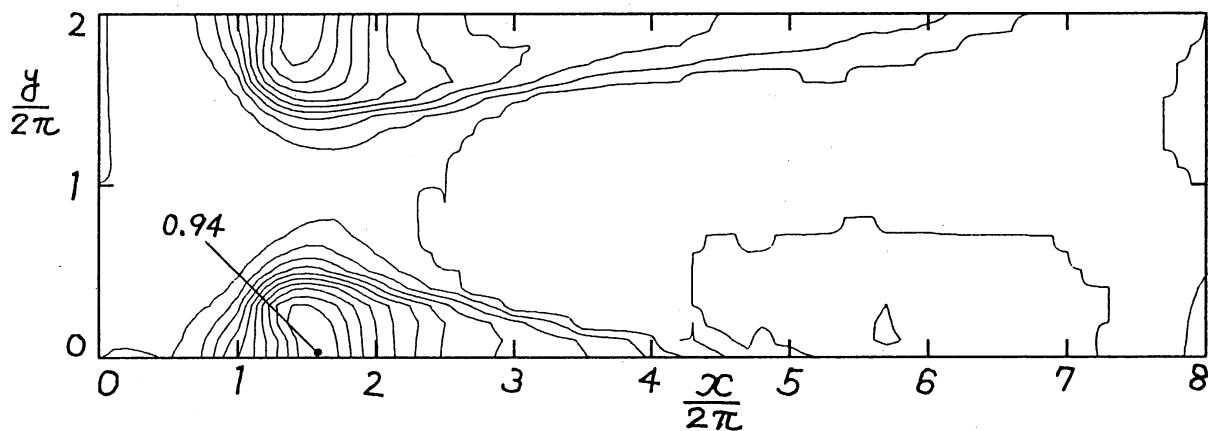


図 9. 平均密度の等値線図. ( $M = 0.2$ ,  $\Omega = 4\pi$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $t = 30\pi$ ).